A N A L I Z A   F U N K C J O N A L N A

WPPT III r., sem. letni
EGZAMIN 1, ROZWIĄZANIA ZADAŃ

Wrocław, 24 czerwca 2011

ZADANIE 1. Niech $p \in [1, \infty)$. Sprawdź, że układ wektorów $E = \{e^{(1)}, e^{(2)}, \dots\}$, gdzie $e^{(n)} = (0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, 0, \dots)$ (jedynka na miejscu n-tym) jest bazą topologiczną w ℓ^p.

ROZWIĄZANIE: Niech $x = (x_n) \in \ell^p$. Sprawdzimy, że $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e^{(n)}$, gdzie szereg jest zbieżny w ℓ^p, tzn., że ciąg sum częściowych $\sum_{n=1}^{N} x_n e^{(n)}$ zbiega (przy $N \to \infty$) do x w normie ℓ^p (potem sprawdzimy jednoznaczność rozwinięcia). A więc najpierw trzeba zbadać normy $\|x - \sum_{n=1}^{N} x_n e^{(n)}\|$. Pod normą mamy różnicę, gdzie odjemna to x, czyli ciąg $(x_1, x_2, \dots)$, a odjemnik to ciąg $(x_1, x_2, \dots, x_N, 0, 0, 0, \dots)$. Zatem różnica ta to ciąg $(0, 0, 0, \dots, 0, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots)$. Jego norma w ℓ^p podniesiona do potęgi p wynosi $\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^p$, a to, jako ogon szeregu zbieżnego, zbiega do zera przy $N \to \infty$. Zatem normy bez potęgi p też zbiegają do zera.

UWAGA: Argument ten nie stosuje się do przestrzeni ℓ^∞, gdyż tam normę liczy się zupełnie innym wzorem.

Teraz jednoznaczność rozwinięcia. Wystarczy pokazywać, że $\mathbf{0}$ (zero w przestrzeni ℓ^p) wyraża się jedynie jako szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n e^{(n)}$, gdzie wszystkie współczynniki x_n są zerami. Przypuśćmy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n e^{(n)} = \mathbf{0}.$$

gdzie szereg jest zbieżny w normie ℓ^p. To oznacza, że normy sum skończonych zbiegają do zera, czyli, że

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} |x_n|^p = 0.$$

Ale to oznacza, że szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ jest zbieżny do zera, w szczególności jest to szereg zbieżny. To to samo, co powiedzieć, że ciąg $x = (x_n)$ należy do ℓ^p. Z pierwszej części zadania wiemy, że wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n e^{(n)}$ jest zbieżny w ℓ^p do elementu x. Ale my założyliśmy, że ten właśnie szereg jest zbieżny w ℓ^p do $\mathbf{0}$. Zatem z jednoznaczności granicy w normie ℓ^p dostajemy, że x jest elementem zerowym w ℓ^p, czyli jest to ciąg samych zer. Pokazaliśmy, że $x_n = 0$ dla wszystkich n, a o to chodziło.

ZADANIE 2. Podaj przykład ciągu funkcji $f_n \in C([0, 1])$ i funkcji $f \in C([0, 1])$ takich, że $P(f_n) \to P(f)$, gdzie P jest funkcjonałem polegającym na obliczeniu całki miarą Lebesgue'a, ale mimo to $f_n \not\to f$ słabo.

ROZWIĄZANIE: Na przykład niech $f_n(x) = x^n$ i $f = \mathbf{0}$ (funkcja tożsamościowo równa zeru). Wtedy $P(f_n) = \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$ i to dąży (po n) do zera, które można zapisać jako $P(\mathbf{0})$, natomiast nie ma zbieżności słabej, gdyż, jeśli za funkcjonał P_1 weźmiemy całkę miarą skupioną w 1, to dla każdego n, $P_1(f_n) = f_n(1) = 1$, co nie zbiega do $P_1(\mathbf{0}) = 0$.

ZADANIE 3. W przestrzeni Hilberta H dana jest podprzestrzeń domknięta H_0 oraz dwa wektory $u \in H$ i $v_0 \in H_0$. Udowodnij, że wektory te są wzajemnie ortogonalne wtedy i tylko wtedy, gdy wzajemnie ortogonalne są v_0 i rzut wektora u na H_0.

ROZWIĄZANIE: Oznaczmy przez u_0 rzut u na H_0. Wtedy mamy

$$\langle u|v_0\rangle = \langle (u-u_0)+u_0|v_0\rangle = \langle u-u_0|v_0\rangle + \langle u_0|v_0\rangle.$$

Pierwszy iloczyn skalarny jest zero, bo $v_0 \in H_0$ oraz $u - u_0 \in H_0^{\perp}$. Zatem

$$\langle u|v_0\rangle = \langle u_0|v_0\rangle, \tag{1}$$

w szczególności pierwszy iloczyn jest zero wtedy i tylko wtedy gdy drugi jest zero.

ZADANIE 4. Sprawdź, że układ $\{z_1, z_2, \dots\}$, gdzie

$$\begin{array}{lllllllll}
z_1 & =(\frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \ \dots) \\
z_2 & =(\frac{1}{\sqrt{2}}, & -\frac{1}{\sqrt{2}}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \ \dots) \\
z_3 & =(0, & 0, & \frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}}, & 0, & 0, & 0, & 0, \ \dots) \\
z_4 & =(0, & 0, & \frac{1}{\sqrt{2}}, & -\frac{1}{\sqrt{2}}, & 0, & 0, & 0, & 0, \ \dots) \\
z_5 & =(0, & 0, & 0, & 0, & \frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}}, & 0, & 0, \ \dots) \\
z_6 & =(0, & 0, & 0, & 0, & \frac{1}{\sqrt{2}}, & -\frac{1}{\sqrt{2}}, & 0, & 0, \ \dots) \\
\vdots & & & & & & & &
\end{array}$$

jest bazą ortonormalną w ℓ^2.

ROZWIĄZANIE: Ortogonalność jest oczywista oprócz dla par takich jak na przykład z_3, z_4. Ale $\langle z_3, z_4\rangle = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, tak samo będzie dla wszystkich innych "podejrzanych" par. Normalność: sprawdzimy przykładowo $\|z_4\|$ (dla reszty będzie tak samo): $\|z_4\|^2 = \langle z_4, z_4\rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, czyli OK. Czyli jest to układ ortonormalny. Teraz trzeba sprawdzić, że rozpina on całą przestrzeń ℓ^2. Wystarczy wygenerować wektory bazy standardowej. Wygenerujemy sobie dla przykładu dwa wektory z tej bazy: $e_3 = (0,0,1,0,0,\dots)$ i $e_4 = (0,0,0,1,0,0,\dots)$ (inne będzie się robić podobnie). No więc, jak łatwo widać, mamy

$$\begin{aligned}
e_3 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(z_3 + z_4) \quad \text{oraz} \\
e_4 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(z_3 - z_4).
\end{aligned}$$

ZADANIE 5. W przestrzeni Hilberta H dana jest podprzestrzeń domknięta H_0. Oznaczmy przez T rzut ortonormalny na H_0. Jest to operator liniowy i ciągły z H

na H_0. Znajdź operator sprzężony T^* (najpierw trzeba ustalić z jakiej przestrzeni do jakiej będzie on działał, a potem jakim wzorem się wyraża).

Wskazówka: Kto zrobił zadanie 3, to być może wyprowadził wzór, który teraz może się przydać.

ROZWIĄZANIE: Wiemy, że $H^* = H$ oraz $H_0^* = H_0$ (bo H_0 jako domknięta podprzestrzeń przestrzeni Hilberta jest też przestrzenią Hilberta). Zatem T^* działa z H_0 do H. Aby ustalić wzór trzeba T^* nałożyć na element $v_0 \in H_0$ traktowany jako funkcjonał na H_0 i to potraktować jako funkcjonał na H, czyli nałożyć na dowolny element u przestrzeni H, potem przenieść T^* (już bez gwiazdki) na u:

$$\langle u|T^*v_0\rangle = \langle Tu|v_0\rangle.$$

Teraz "przypominamy sobie", że Tu to rzut ortogonalny u na H_0 (powiedzmy, że rzut ten oznaczymy przez u_0), czyli otrzymaliśmy:

$$\langle u|T^*v_0\rangle = \langle u_0|v_0\rangle.$$

Ale to ostatnie już znamy z rozwiązania zadania 3 (wzór (1)). To jest to samo, co $\langle u|v_0\rangle$. Ostatecznie pokazaliśmy, że dla dowolnego $u \in H$,

$$\langle u|T^*v_0\rangle = \langle u|v_0\rangle,$$

czyli po prostu, że $T^*v_0 = v_0$. Innymi słowy, T^* jest operatorem tożsamościowym (obciętym do H_0).

Tomasz Downarowicz